hypersphere

October 23, 2019

1 Calcul du volume de l'hyper-sphère de dimension d

Le but de l'exercice est de calculer le volume de l'hypersphère en dimension d définie par :

$$\mathcal{S}_d = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^d \ : \ \sum_{i=1}^{d} x_i^2 = 1\}$$

Le volume de la sphère se définit par l'intégrale de la boule

$$\mathcal{B}_d = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^d \ : \ \sum_{i=1}^{d} x_i^2 \leq 1\}$$

Donc:

$$vol(\mathcal{S}_d) = \int_{\mathcal{B}_d} dx = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{\mathcal{B}_d}(x) dx$$

On se restreint à l'hyper-cube $[0;1]^d$, le volume total se déduisant par symmétrie. Deux méthodes sont explorées :

- Méthodes des rectangles
- Monte Carlo

1.1 Exercice 1 : Méthodes des rectangles

On approxime une fonction $f : [0;1]^d \to \mathbb{R}$ par sa somme de Riemann d'ordre N :

$$\int_{[0;1]^d} f(p) dp \approx \left(\frac{1}{N}\right)^d \sum_{p_1, \ldots, p_d} f(p_1, \ldots, p_d), \tag{1}$$

où $p_i \in \{0, \frac{1}{N}, \ldots, \frac{N-1}{N}\}, \forall i = 1, \ldots, d$.

Question 1 Coder `quadrillage(d, N)` qui renvoie le pavage du premier quadrant en dimension d, *i.e* les points de $\{0, \frac{1}{N}, \ldots, \frac{N-1}{N}\}^d$. Il y en a N^d distincts, le résultat doit être sous la forme d'un `numpy.array` de shape `(N^d,d)`. Afficher ce quadrillage avec à l'aide de matplotlib.

Indication : Regarder comment faire un produit cartésien de différentes listes en Python. P. ex. ici

Question 2 Coder la fonction indicatrice de la sphère de dimension d

$$f : p \in [0;1]^d \mapsto f(p) = \mathbb{1}_{\mathcal{S}}(p) \tag{2}$$

Question 3 Écrire une fonction `Rectangle(d,N)` qui prend en entrée une dimension d et un entier N et renvoie une estimation du volume contenu dans l'hypershpère en dimension d par la méthode des rectangles, pour $d \geq 1$.

Question 4 Approximer le volume de l'hyper-sphère pour $d = 1, 2, 3$ et 4. Afficher l'évolution du volume en fonction de d. Que constatez-vous quand N augmente ?

Question 5 : Gagner un facteur N On peut en fait utiliser la même méthode de manière moins naïve. Il s'agit de voir la sphère en dimension $d + 1$ comme une fontion de $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. La fonction définissant l'hypersphère de dimension $d + 1$, prend un point de la boulde $\mathcal{B}(0, 1)$ et lui associe sa "hauteur" (intuition valable en dimension 3), elle s'écrit :

$$f_2(p) = \left(\begin{array}{ll} (1 - \sum_1^d p_i^2)^{1/2} & \text{si p appartient à la boule euclidienne (dans } \mathbb{R}^d\text{) de centre 0 et de rayon 1.} \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right. \tag{3}$$

De cette manière, il suffit de générer N^{d-1} au lieu des N^d des questions précédentes. Cette méthodes fait donc gagner un facteur N.

Coder la nouvelle fonction `f`.

Ecrire une fonction `Rectangle2(d,N)` qui prend en entrée une dimension d et un entier N et renvoie une estimation du volume contenu dans l'hypersphère en dimension d par la méthode des rectangles pour cette nouvelle fonction f_2, pour $d \geq 2$.

Reproduire le graphique de la question 4 en essayant d'augmenter `N`.

2 Exercice 2 : Monte-Carlo

La méthode de Monte-Carlo consiste dans le fait de tirer au hasard des points dans un volume de type $[0, 1]^d$, de manière uniforme (pour la méthode la plus simple), et de déduire le volume de l'hypersphère (plus exactement, la partie de l'hypersphère contenue dans le premier cadran) comme la proportion de points vérifiant l'inégalité $\sum_i x_i^2 \leq 1$.

Question 1 Écrire une fonction `MonteCarlo(d, N)` qui prend en entrée une dimension d et un entier N et renvoie une estimation du volume contenu dans l'hypershpère P d en dimension d comme proportion de points tirés de manière uniforme vérifiant l'inégalité $\sum_i x_i^2 \leq 1$

Question 2 Trouver une estimation du volume pour $d = 1$ à 9. Afficher l'évolution du volume en fonction de d. Que constatez-vous?